# Matricial Algebra and Numerical Analysis MANA

## CM 2 : Algèbre bilinéaire et analyse géométrique

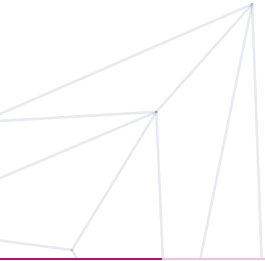
**Laurence Denneulin**
**EPITA**

Matricial Algebra and Numerical Analysis MANA © 2026 Laurence Denneulin is licensed under CC BY 4.0.
To view a copy of this license, visit https ://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

# Motivation

Précédemment dans MANA :

- rappels d'algèbre linéaire,
- introduction des transformations isométriques.




licensed under CC BY 4.0

# Motivation

Précédemment dans MANA :

- rappels d'algèbre linéaire,
- introduction des transformations isométriques.

Les transformations qui ne sont pas isométriques vont affecter :

- les longueurs,
- les angles,
- les surfaces et volumes...


licensed under CC BY 4.0

# Motivation

Précédemment dans MANA :

- rappels d'algèbre linéaire,
- introduction des transformations isométriques.

Les transformations qui ne sont pas isométriques vont affecter :

- les longueurs,
- les angles,
- les surfaces et volumes...

Avant de pouvoir introduire des transformations qui changent ces mesures, il est nécessaire d'introduire les outils pour les calculer et les manipuler.


licensed under CC BY 4.0

# Motivation

Précédemment dans MANA :

- rappels d'algèbre linéaire,
- introduction des transformations isométriques.

Les transformations qui ne sont pas isométriques vont affecter :

- les longueurs,
- les angles,
- les surfaces et volumes...

Avant de pouvoir introduire des transformations qui changent ces mesures, il est nécessaire d'introduire les outils pour les calculer et les manipuler.

C'est le but de ce cours.


licensed under CC BY 4.0

# Table des matières


01 Norme, longueur et distance

02 Produit scalaire, angles et projection

03 Vers la dimension infinie



licensed under CC BY 4.0

# 01

# Norme, longueur et distance

# Normes et longueur

## Définition

Soit $V$ un espace vectoriel. On appelle norme la fonction $\|\cdot\|V \to \mathbb{R}$ qui à $\mathbf{x} \in V$ associe la longueur $\|\mathbf{x}\|$, telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ les conditions suivantes sont satisfaites :

- Homogénéité : $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$,
- Inégalité triangulaire : $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$,
- Positivité : $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ et $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_V$.





## Distance

Soit deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ et une norme $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, on appelle distance ou métrique entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ la quantité :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{1}$$

Avec les normes vus précédemment on retrouve la distance de Manhattan, la distance Euclidienne et la distance de Tchebytchev.


licensed under CC BY 4.0

## Distance

Soit deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ et une norme $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, on appelle distance ou métrique entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ la quantité :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{1}$$

Avec les normes vus précédemment on retrouve la distance de Manhattan, la distance Euclidienne et la distance de Tchebytchev.

## Espace métrique

Soit $V$ un espace vectoriel. Le couple $(V, d)$ est un espace métrique si l'application $d : V \times V \to \mathbb{R}$ vérifie les trois conditions suivantes :

- Positivité : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \, \forall \, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ and $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- Symétrie : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
- Inégalité triangulaire : $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \, \forall \, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.


licensed under CC BY 4.0

02

# Produit scalaire, angles et projection

# Produit scalaire

**Définition**

Soit $V$ un espace vectoriel sur $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle produit scalaire l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to E$ telle que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ les conditions suivantes sont satisfaites :

- Bilinéarité : $\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ et $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$,
- Symétrie : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$,
- Positivité : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ et $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_V$.

Exercice : Vérifier les conditions pour le produit scalaire Euclidien (*dot product*).


licensed under CC BY 4.0

# Produits scalaires et matrices symétriques définies positives

Soit la base Euclidienne de $V \in \mathbb{R}^N$ notée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ alors le produit scalaire Euclidien peut être écrit de la manière suivante :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{N} y_j \mathbf{e}_j \rangle \underset{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle y_j = \mathbf{x}^t \mathbf{I} \mathbf{d} \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y}. \quad (2)$$


licensed under CC BY 4.0

# Produits scalaires et matrices symétriques définies positives

Soit la base Euclidienne de $V \in \mathbb{R}^N$ notée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ alors le produit scalaire Euclidien peut être écrit de la manière suivante :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{N} y_j \mathbf{e}_j \rangle \underset{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle y_j = \mathbf{x}^t \mathbf{I} \mathbf{d} \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y}. \tag{2}$$

Soit une base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N\}$ quelconque de $V$ et $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ les coordonnées de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ dans cette base, alors on peut également écrire :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} u_i \mathbf{b}_i, \sum_{j=1}^{N} v_j \mathbf{b}_j \rangle \underset{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle v_j = \mathbf{u}^t \mathbf{B} \mathbf{v}, \tag{3}$$

où $\mathbf{B}$ est, par définition du produit scalaire, est une matrice symétrique, définie positive. De la même manière, si $\mathbf{B}$ est une matrice symétrique définie positive, alors elle peut définir un produit scalaire.


licensed under CC BY 4.0

# Autres définitions et propriétés

## Norme induite par un produit scalaire

Une norme peut être induite par un produit scalaire (ce n'est pas toujours le cas), auquel cas on la définie de la manière suivante :

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \tag{4}$$

C'est le cas de la norme $\ell_2$.

## Propriété

Soit $\mathbf{x} \in U$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^M$, $\mathbf{y} \in V$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$, $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire, alors :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{M}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{M}^t \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \tag{5}$$


licensed under CC BY 4.0

## Angle entre deux vecteurs

Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}_V$, alors l'angle $\phi$ entre les deux vecteurs est tel que :

$$\cos(\phi) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}. \tag{6}$$




On retrouve que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont orthogonaux alors $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ et si ils sont colinéaire alors le produit scalaire est maximal.


licensed under CC BY 4.0




## Projection orthogonale sur un sous-ensemble

Soit $\mathbf{x} \in V$ et un sous-espace vectoriel $U \subset V$, décrit par les vecteurs $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_N$. Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 & \ldots & \mathbf{m}_N \end{pmatrix}$ où les vecteurs $\mathbf{m}_i$ sont les colonnes de $\mathbf{M}$. Alors la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ sur $U$ est donnée par :

$$\Pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^t\mathbf{x}. \tag{7}$$

On appelle

$$\mathbf{P}_U = \mathbf{M}(\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^t \tag{8}$$

la matrice de projection.


licensed under CC BY 4.0

# D'où vient cette formule ?

On cherche un point $\Pi_U(\mathbf{x}) \in U$ le plus proche de $\mathbf{x}$.

- "$\Pi_U(\mathbf{x}) \in U$" $\Rightarrow \exists\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ tel que $\Pi_U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{m}_i = \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}$. Cela revient à chercher les coordonnées $\boldsymbol{\lambda}$ du point $\Pi_U(\mathbf{x})$ dans la base des $\mathbf{m}_i$.
- "le plus proche de $\mathbf{x}$" c'est-à-dire tel que la distance $\|\mathbf{x} - \Pi_U(\mathbf{x})\|^2$ est minimale. Cela implique que $\mathbf{x} - \Pi_U(\mathbf{x})$ doit être orthogonal à tous les $\mathbf{m}_i$.


licensed under CC BY 4.0

# D'où vient cette formule ?

On cherche un point $\Pi_U(\mathbf{x}) \in U$ le plus proche de $\mathbf{x}$.

- "$\Pi_U(\mathbf{x}) \in U$" $\Rightarrow \exists\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ tel que $\Pi_U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{m}_i = \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}$. Cela revient à chercher les coordonnées $\boldsymbol{\lambda}$ du point $\Pi_U(\mathbf{x})$ dans la base des $\mathbf{m}_i$.
- "le plus proche de $\mathbf{x}$" c'est-à-dire tel que la distance $\|\mathbf{x} - \Pi_U(\mathbf{x})\|^2$ est minimale. Cela implique que $\mathbf{x} - \Pi_U(\mathbf{x})$ doit être orthogonal à tous les $\mathbf{m}_i$.

$$
\begin{aligned}
& \forall i = 1, \dots, N,\ \langle \mathbf{x} - \Pi_U(\mathbf{x}), \mathbf{m}_i \rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall i = 1, \dots, N,\ \mathbf{m}_i^t \left(\mathbf{x} - \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{M}^t(\mathbf{x} - \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{M}^t\mathbf{x} = \mathbf{M}^t\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^t\mathbf{x} \\
\Leftrightarrow\ & \Pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^t\mathbf{x}
\end{aligned}
\tag{9}
$$


licensed under CC BY 4.0




## Déterminant

Soit $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M\}$ un ensemble de vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^N$, alors le déterminant de la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_M \end{pmatrix}$, noté $\det(\mathbf{M})$, donne le volume engendré par les vecteurs de $V$, c'est-à-dire le volume du parallélépipède en $M$ dimension (parallélogramme en 2D) dont les cotés sont les vecteurs.

Remarque : lorsqu'on transforme un objet par la matrice $M$, le volume de l'objet est multiplié par $|\det(\mathbf{M})|$.


licensed under CC BY 4.0




## Déterminant

Soit $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M\}$ un ensemble de vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^N$, alors le déterminant de la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_M \end{pmatrix}$, noté $\det(\mathbf{M})$, donne le volume engendré par les vecteurs de $V$, c'est-à-dire le volume du parallélépipède en $M$ dimension (parallélogramme en 2D) dont les cotés sont les vecteurs.

Remarque : lorsqu'on transforme un objet par la matrice $M$, le volume de l'objet est multiplié par $|\det(\mathbf{M})|$.

Que se passe-t-il si $M \neq N$ ou si $\det(\mathbf{M}) = 0$ ?

Si $\det(\mathbf{M}) = 0$, on a une dépendance linéaire et donc le volume vaut 0. Il faut alors changer de repère afin de se restreindre à la dimension égale au rang de $\mathbf{M}$.


licensed under CC BY 4.0

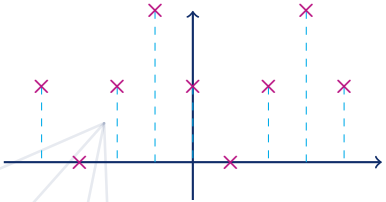
# 03

# Vers la dimension infinie

# Espace de dimension finie VS dimension infinie

## Dimension finie

À l'indice $i \in I \subset \mathbb{N}$ discret
associe la valeur $v_i \in E \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

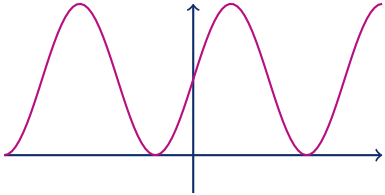


Opérateur de la somme discrète :

$$\sum_{i \in I} v_i$$

## Dimension infinie

À la variable $x \in I \subset \mathbb{R}$ continue
associe la valeur $v(x) \in E \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.



Opérateur de la somme continue :

$$\int_I v(x)\mathrm{d}x$$


licensed under CC BY 4.0

## Produit scalaire de fonctions

Soit deux fonctions $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors le produit scalaire peut être défini comme l'intégrale suivante :

$$\langle u, v \rangle := \int_R u(x)v(x)dx \tag{10}$$

De la même manière qu'en dimension finie, de ce produit scalaire peut découler des normes, etc...

To be continued in ITSI au S6...


licensed under CC BY 4.0

# Des Questions ?

